Serie 2

1. Von einem Nachrichtenkanal werden nacheinander 4 Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen daher als Grundraum Ω die Menge der 0–1 Folgen der Länge 4, d.h.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\}.$$

Dabei bedeutet $x_i = 1$, dass das i-te Signal richtig übertragen worden ist, und $x_i = 0$, dass das i-te Signal falsch übertragen worden ist.
Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

A = „Genau ein Signal wird falsch übertragen."
B = „Höchstens zwei Signale werden falsch übertragen."
C = „Keine zwei aufeinanderfolgenden Signale werden richtig übertragen. "

a) Identifizieren Sie A, B und C mit Teilmengen von Ω.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C unter der Annahme, dass alle Elementarereignisse $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind.

2. **a)** Seien A_i, $i = 1, 2, 3$, beliebige Ereignisse. Aus der Vorlesung (Formel (1.2.14) im Skript) wissen Sie, dass

$$P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2].$$

Finden Sie eine ähnliche Formel für $P[A_1 \cup A_2 \cup A_3]$.

b) Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk mit drei parallelen Schaltern (R_1, R_2, R_3). Die Wahrscheinlichkeiten dass die Schalter R_1, R_2 und R_3 geschlossen sind, betragen 0.6, 0.55 und 0.5, respektive. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schalter gleichzeitig geschlossen sind, beträgt 0.25. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Schalter geschlossen sind, beträgt 0.1.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schalter geschlossen ist.

Bitte wenden!

3. Ein fairer Würfel wird N mal geworfen. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$A_k = \text{„Die } 3 \text{ erscheint beim } k\text{-ten Wurf“},$$
$$B_k = \text{„Die } 6 \text{ erscheint beim } k\text{-ten Wurf“}.$$

a) Definiere ein geeignetes Laplace Modell und berechne $P(A_k)$ und $P(B_k)$, für $k = 1, \dots, N$.

b) Drücke folgende Ereignisse mit Hilfe von A_k und B_k $(k = 1, \dots, N)$ aus:

$$A = \text{„Die } 6 \text{ erscheint nie in den } N \text{ Würfen“},$$
$$B = \text{„Die } 3 \text{ erscheint mindestens einmal in den } N \text{ Würfen“},$$
$$C = \text{„Die } 6 \text{ erscheint mindestens einmal und die } 3 \text{ mindestens zweimal in den } N \text{ Würfen“}.$$

c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten von A und B aus **b)**.

d) Beschreibe in Worte die folgenden Ereignisse:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i^c\right)^c,$$
$$\bigcup_{i=1}^{N-2} (A_i \cap A_{i+1} \cap B_{i+2}),$$
$$\bigcap_{i=1}^{N-1} (A_i \cup B_{i+1}).$$

4. Prinzip von Inklusion und Exklusion

Seien A_i, $i = 1, \dots, n$, beliebige Ereignisse, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Es gilt dann folgende Regel:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}].$$

Beweisen Sie diese Formel durch Induktion nach n.

Abgabe: Montag 13. März in der Übungsstunde.